ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-193-202
УДК 517.968

Об исследовании задачи Неймана для эллиптических систем двух уравнений шестого порядка на плоскости

Джасур Музофирович ОДИНАБЕКОВ
ГОУ «Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в городе Душанбе»
734002, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1

Аннотация. Как известно, на основе применения методов теории сингулярных интегральных уравнений были получены тонкие результаты в теории дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящей работе изучается вопрос о разрешимости задачи Неймана для эллиптической системы двух уравнений шестого порядка с двумя независимыми переменными по ограниченной области. При исследовании данной задачи используется метод, разработанный Б. Боярским, суть которого заключается в построении матричной функции по главной части системы и разбиении полиномов на гомотопические классы. С помощью этого подхода нами показана эллиптичность рассматриваемой системы. Также показано, что в соответствии с гомотопическими классами эллиптическая система двух уравнений с двумя независимыми переменными шестого порядка эквивалентным образом приводится к сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области. Методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению найдены эффективные условия нетеровости и получена формула для вычисления индекса изучаемой задачи.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача Неймана, сингулярные интегральные уравнения, нетеровость, индекс задачи

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Для цитирования: *Одинабеков Д.М.* Об исследовании задачи Неймана для эллиптических систем двух уравнений шестого порядка на плоскости // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 193–202. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-193-202

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-193-202

On the study of the Neumann problem for elliptic system of two sixth order equations on the plane

Jasur M. ODINABEKOV
Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe
35/1 Bokhtar St., Dushanbe 734002, Tajikistan

Abstract. As it is known, on the basis of the methods of the theory of singular integral equations, fine results were obtained in the theory of partial differential equations. In this paper, we study the question of solvability of the Neumann problem for an elliptic system of two six order equations with two independent variables in a bounded domain. During the study of this problem, the method developed by Boyarsky is used. The essence of this method is to construct a matrix function on base of the main part of the given system and split polynomials into homotopy classes. Using this approach, the ellipticity of the system under consideration is proved. It is also shown that, in accordance with homotopy classes, an elliptic system of two sixth order equations with two independent variables can be equivalently reduced to a singular integral equation over a bounded domain. Using the method of passing to an equivalent singular integral equation over a bounded domain, effective Noetherian conditions are found, and a formula for calculating the index of the problem is obtained.

Keywords: elliptic system, Neumann problem, singular integral equations, Noetherian conditions, problem index

Acknowledgements: The work was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation within the framework of program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no. 075-15-2022-284.

Mathematics Subject Classification: 35J58, 45F15.

For citation: Odinabekov J.M. On the study of the Neumann problem for elliptic system of two sixth order equations in the plane. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 193–202.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-193-202

Введение

В работе [1] в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ было изучено дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{j=0}^{2} a_j(x,y)\frac{\partial^2\omega}{\partial x^j \partial y^{2-j}} + b_1(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial\omega} + b_0(x,y)\omega = g(x,y), \tag{0.1}$$

где $a_j(x,y), b_j(x,y)$ $(j = 0,1,2)$ — квадратные матрицы размера 2×2, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ — неизвестная вектор-функция переменных x и y, $g = (g_1, g_2)$ — заданная вектор-функция.

Оператор, стоящий в левой части (0.1), называется эллиптическим в области $\overline{D} = D\cup\Gamma$ с границей $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$, если в любой точке $(x,y) \in \overline{D}$ выполняется условие

$$\det \sum_{j=0}^{2} a_j(x,y) \neq 0.$$

Для уравнения (0.1) *задача Дирихле* ставится следующим образом: в области D с границей Γ требуется найти регулярное решение уравнения (0.1), принадлежащее классу $C(D)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$\omega|_{\Gamma} = g(x,y). \tag{0.2}$$

Из работы М. И. Вишика [2] следует, что если система (0.1) сильно эллиптическая (система (0.1) называется сильно эллиптической в точке (x,y), если матрица $\sum_{j=0}^{2} a_j(x,y)\xi^j$ является положительной для любых действительных чисел ξ^0, ξ^1, ξ^2, не обращающихся одновременно в нуль), то задачи Дирихле для (0.1) и сопряженной системы образуют фредгольмову пару граничных задач. Общие эллиптические системы этим свойством, вообще говоря, не обладают. Как показывают примеры А.В. Бицадзе (см. [3]), однородная задача (0.1), (0.2) для эллиптической системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2\omega_2}{\partial x\partial y} = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2\omega_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\omega_2}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

может допускать бесконечное число линейно независимых решений.

Для достаточно широкого класса эллиптических систем задача (0.1), (0.2) и более общие граничные задачи изучены в работах А. В. Бицадзе [4–6], И. Н. Векуа [7, 8], Б. В. Боярского [9, 10]. Задачи, рассмотренные в этих работах, приведены к эквивалентному интегральному уравнению нормального типа, доказана нетеровость этих задач и найден их индекс. Тесная связь между теорией эллиптических дифференциальных уравнений и теорией функций комплексного переменного стала очевидной на примере уравнения Лапласа. Это классическое направление в теории функций, восходящее к работам Эйлера и, особенно, Римана. В последнее время усиливается внимание выявлению связей теории функций с более общими дифференциальными уравнениями с частными производными вида (0.1).

В работе [11] А. И. Вольперт исследовал систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(b\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(c\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(a'\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big) = 0, \tag{0.3}$$

где

$$a=\frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} q & s-1\\ s+1 & -q\end{pmatrix},\qquad b=\frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} -s+1 & q\\ q & s+1\end{pmatrix},$$
$$c=\frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} s+1 & -q\\ -q & -s+1\end{pmatrix},\qquad a'=\frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} q & s+1\\ s-1 & -q\end{pmatrix},$$

$\triangle = 1-s^2-q^2$, s,q — полиномы: $s=\lambda Rez^n$, $q=\lambda Imz^n$ $(z=x+iy,\ 0<\lambda<1)$; $\omega=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$; n — произвольное натуральное число ($'$ означает транспонирование). В [11] показано, что система (0.3) эллиптическая в единичном круге, так как

$$\det\Big(a\alpha^2+b\alpha\beta+c\alpha\beta+a'\beta^2\Big)=\frac{1}{\triangle}\Big(\alpha^2+\beta^2\Big)^2.$$

Рассмотрены следующие сопряженные задачи:

Задача 1. Найти в круге $|z|<1$ решение ω из класса K (где K — класс функций, непрерывных вместе с первыми производными в $\overline{D}=D\cup\Gamma$ и имеющих вторые непрерывные производные в D) системы (0.3), удовлетворяющее граничному условию $\omega|_\Gamma=0$.

Задача 1^*. Найти в круге $|z|<1$ решение ω из класса K системы

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(a'\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(b\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(c\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(a\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big)=0,$$

удовлетворяющее граничному условию $\omega|_\Gamma=0$.

Показано, что имеют место следующие утверждения:

1. *Столбцы*

$$\omega_{kl}=\begin{pmatrix}ReP_{kl}\\ ImP_{kl}\end{pmatrix}\ \ (k=1,2,.....,n;\ l=0,1)$$

образуют полную систему линейно независимых решений задачи 1, *где*

$$P_{1l}=i^l\Big[\overline{z}^{n-1}(1-r^2)(n+1-\lambda^2)-(-1)^l\lambda z(1-r^{2n})\Big],$$
$$P_{kl}=i^l\Big[\lambda\overline{z}^{n-k}(1-r^{2k})-(-1)^l k\overline{z}^{k-2}(1-r^2)\Big]$$

$(\overline{z}=x-iy,\quad r=|z|,\quad k\geq 2)$.

2. *Задача* 1^* *не имеет отличных от нуля решений.*

Из этих утверждений следует, что *индекс задачи* 1 *равен* $2n$.

В работе [12] для равномерно эллиптической системы m уравнений

$$\mathcal{U}\Big(x,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\omega\equiv\sum_{k,j=1}^{n}A_{kj}(x)\frac{\partial^2\omega}{\partial x_k\partial x_j}+\ldots=0 \qquad (0.4)$$

(точками обозначены члены младших порядков по ω) с достаточно гладкими вещественными коэффициентами рассматриваются краевые задачи Дирихле

$$\omega|_\Gamma=f$$

и Неймана

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu}|_\Gamma=g$$

(ν — внутренняя нормаль) в классических предположениях.

Известно, что в случае $m = 2$ так же, как для одного уравнения, задачи Дирихле и Неймана для системы (0.4) при $n > 2$ поставлены корректно и имеют нулевой индекс (см. [9,13]). Однако, как показывает пример (см. [14]), уже для эллиптических систем трех уравнений задача Дирихле, а вместе с ней задача Неймана (см. [15]), вообще говоря, не корректны. При $m > 2$ для обеспечения нетеровости краевой задачи Дирихле необходимо потребовать выполнение условия регуляризуемости Я. Б. Лопатинского (см. [16]): ранг матрицы

$$\int_D \Big\{\mathcal{U}^{-1}\Big(y, \lambda\nu + \tau\Big), \lambda\mathcal{U}^{-1}\Big(y, \lambda\nu + \tau\Big)\Big\} d\lambda, \quad y \in \Gamma,$$

должен быть максимален. Всюду в дальнейшем оно предполагается выполненным. Но тогда условие регуляризуемости будет выполнено и для задачи Неймана, поскольку обе задачи регуляризуемы или нет одновременно (см. [15]), так что задача Неймана тоже будет нетеровой. В [12] показано, что индексы задач Дирихле и Неймана совпадают и задача Неймана фредгольмова в следующих двух случаях: $p < n$ или n нечетно.

1. Постановка задачи. Основной результат

Следует отметить, что теория двумерных сингулярных интегральных операторов находится в тесной связи с теорией граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости (см. [7, 8, 17]). В последнее время Г. Джангибековым были получены (см. например, [18–25]) эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса некоторых классов двумерных сингулярных операторов по ограниченной области. Использование этих результатов позволило, в частности, получить в работах [1, 22, 25] теорию разрешимости задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем уравнений второго и четвертого порядка на плоскости, и вычислить индекс этих задач через коэффициенты системы.

В этом пункте изучается вопрос разрешимости задачи Неймана для эллиптической системы двух уравнений шестого порядка на плоскости методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной плоскости $z = x + iy$. Рассмотрим дифференциальное уравнение шестого порядка

$$a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} + \sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right] = g(z), \tag{1.1}$$

где $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, коэффициенты уравнения $a(z)$, $b(z)$ будем считать непрерывными в $\overline{D}$, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

По главной части системы (1.1) построим матрицу-функцию

$$\mathcal{G}(z,\sigma) = \begin{pmatrix} \dfrac{a(z)}{b(z)\sigma^6} & \dfrac{b(z)\overline{\sigma}^6}{a(z)} \end{pmatrix}.$$

Эллиптичность системы (1.1) означает, что для любой точки $z \in \overline{D}$ и любого не равного нулю комплексного числа $\sigma = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ должно выполняться неравенство

$\det \mathcal{G}(z,\sigma) \neq 0$. Очевидно, что

$$\det \mathcal{G}(z,\sigma) \equiv |a(z)|^2 - |b(z)|^2 \neq 0$$

для всех $z \in \overline{D}$. Отметим, что в работе [26] рассматривается эллиптическая система шестого порядка общего вида, однако применительно к (1.1) полученные результаты охватывают только случай сильно эллиптической системы, т. е. когда $|a(z)| > |b(z)|$ для всех $z \in \overline{D}$.

Множество всех полиномиальных матриц вида $\mathcal{G}(z,\sigma)$, удовлетворяющих условию

$$\det \mathcal{G}(z,\sigma) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2 > 0\,(< 0) \ \text{ для всех } \ z \in \overline{D},$$

обозначим через $\mathcal{G}^+\,(\mathcal{G}^-)$.

Две матрицы $\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2$ из класса $\mathcal{G}^+$ назовем гомотопными $\mathcal{G}^1 \sim \mathcal{G}^2$, если существует семейство полиномиальных матриц $\mathcal{G}^+(\tau)$ из $\mathcal{G}^+$, непрерывно зависящих от действительного параметра $\tau\colon\ 0 \le \tau \le 1$, такое, что

$$\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}^2.$$

Две эллиптические системы из множества всех эллиптических систем (9) с одинаковой главной частью такой, что $\mathcal{G}(z,\sigma) \in \mathcal{G}^+$ можно тогда и только тогда соединить непрерывным путем в $\mathcal{G}^+$, если характеристические матричные полиномы этих систем гомотопны. Таким образом, соотношение гомотопии разбивает $\mathcal{G}^+$ на два класса гомотопии — связные открытые множества:

класс ε^+, в котором выполняется неравенство $|a(z)| > |b(z)|$ для всех $z \in \overline{D}$;

класс ε^-, в котором выполняется неравенство $|a(z)| < |b(z)|$ для всех $z \in \overline{D}$.

Эти классы образуют полную систему множества $\mathcal{G}^\pm$, т. е. $\mathcal{G}^1$ и $\mathcal{G}^2$ из F^+ принадлежат некоторому классу $\varepsilon^\pm$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}^1 \sim \mathcal{G}^2$.

Задача Неймана состоит в нахождении функции $\omega(z)$ из класса $W_p^6(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющей внутри области D уравнению (1.1), а на ее границе Γ следующим краевым условиям

$$\omega(z)\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{1.2}$$

где $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ — производная по направлению внутренней нормали в точках контура Γ.

Известно (см. [8, 17]), что любая комплекснозначная функция класса $W_p^6(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющая на границе Γ однородным краевым условиям (1.2), представляется в виде

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D G_6(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta,$$

с произвольной комплекснозначной плотностью $f(z) \in L_p(D)$, где $G_6(z,\zeta)$ функция Грина бигармонического уравнения в области D :

$$G_6(z,\zeta) = |\zeta - z|^4 \ln\left|\frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right|^2 - |\zeta - z|^2 (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) + \frac{1}{2}(1 - |z|^2)^2 (1 - |\zeta|^2)^2.$$

Очевидно, что все производные от функции $\omega(z)$ по z и $\overline{z}$ до пятого порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность и, следовательно, являются вполне непрерывными в $L_p(D)\,(1<p<\infty)$ операторами.

Непосредственный подсчет показывает, что $\frac{\partial^6\omega}{\partial z^6}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial^6\omega}{\partial z^6}=\iint_D K(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta(z), \tag{1.3}$$

где

$$K(z,\overline{\zeta})=-\frac{3}{\pi}\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^4}+K_1(z,\overline{\zeta}),\quad K_1(z,\overline{\zeta})=\frac{3(\overline{\zeta}-\overline{z})^2\overline{\zeta}^4}{\pi(1-z\overline{\zeta})^4}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3}=f(z). \tag{1.4}$$

Здесь следует отметить, что интегральный оператор с ядром $K(z,\overline{\zeta})$ во внутренних точках области D имеет особенность порядка 2, поэтому интеграл нужно понимать в смысле главного значения по Коши. Что касается точек границы, т. е. когда $\zeta\in\Gamma$, то нетрудно проверить, что в этом случае $K(z,\overline{\zeta})=0$.

Подставляя значения производных из (1.3), (1.4) в исходное дифференциальное уравнение (1.1), для определения функции $f(z)$ получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)f(z)+b(z)(S^*f)(z)+(Tf)(z)=g(z), \tag{1.5}$$

где T — вполне непрерывный в $L^p(D)$, $p>2$ оператор,

$$(S^*f)(z)=-\frac{3}{\pi}\iint_D\Big(\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^4}-\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2\overline{\zeta}^4}{(1-z\overline{\zeta})^4}\Big)f(\zeta)ds_\zeta.$$

Интегральное уравнение (1.5) относится к двумерным сингулярным интегральным уравнениям с четными характеристиками по ограниченной области, которые изучены в работе [20]. Далее к сингулярным интегральным уравнениям (1.5) применяется результаты из [20], и в зависимости от гомотопических классов $\varepsilon^\pm$ для задачи Неймана (1.2) эллиптической системы (1.1) получим следующее утверждение.

Теорема. *Для того, чтобы задача (1.2) для эллиптической системы (1.1) в классе $W_p^6(D)$, $2<p<\infty$ была нетеровой, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$|a(z)|\neq|b(z)|\ \textit{для всех}\ z\in\overline{D},\quad a(t)\neq 0\quad\textit{для всех}\quad t\in\Gamma,$$

причем, если $|a(z)|>|b(z)|$, то индекс задачи равен 0, а если $|a(z)|<|b(z)|$, то индекс задачи равен

$$\varkappa=-\frac{3}{\pi}\Big[\arg a(t)\Big]_\Gamma.$$

Пример. В качестве примера рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$z^n\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+\lambda\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6}=g(z),$$

где λ — комплексный параметр, удовлетворяющий неравенству $|\lambda|\geq 1$, n — произвольное натуральное число. Устанавливается, что соответствующее сингулярное интегральное уравнение задачи (1.2) методом разложения искомой функции $f(z)$ в ряд Фурье по полярному углу, относительно коэффициентов Фурье сводится к системам интегральных уравнений с ядрами, однородными порядка -1. Доказывается, что однородная задача (1.1), (1.2) имеет ровно $6n$ линейно независимых решений (над полем вещественных чисел), а сопряженная однородная задача ненулевых решений не имеет. Отсюда следует, что индекс задачи равен $6n$.

References

[1] Г. Джангибеков, "Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости", *Докл. РАН*, **330**:4 (1993), 415–419; англ. пер.:G. Dzhangibekov, "On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations on the plane", *Dokl. Math.*, **47**:3 (1993), 498–503.

[2] М. И. Вишик, "О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений", *Матем. сб.*, **29(71)**:3 (1951), 615–676. [M. I. Vishik, "On strongly elliptic system of differential equations", *Mat. Sb. (N.S.)*, **29(71)**:3 (1951), 615–676 (In Russian)].

[3] А. В. Бицадзе, "Об единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными", *УМН*, **3**:6(28) (1948), 211–212. [A. V. Bitsadze, "On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for elliptic partial differential equations", *Uspekhi Mat. Nauk*, **3**:6(28) (1948), 211–212 (In Russian)].

[4] А. В. Бицадзе, "Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка", *Докл. АН СССР*, **112**:6 (1957), 983–986. [A.V. Bitsadze, "On elliptical systems of second order partial differential equations", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **112**:6 (1957), 983–986 (In Russian)].

[5] А. В. Бицадзе, "Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа", *Сообщения АН ГрузССР*, **5**:8 (1944), 761–770. [A. V. Bitsadze, "Boundary value problems for systems of linear differentiation alternate equations of elliptical type", *Communications of Academy of Sciences of Georgia*, **5**:8 (1944), 761–770 (In Russian)].

[6] А. В. Бицадзе, *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1959. [A. V. Bitsadze, *Mixed Type Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1959 (In Russian)].

[7] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, ФИЗМАТГИЗ, М., 1959. [I. N. Vekua, *Generalized Analytic Functions*, FIZMATGIZ, Moscow, 1959 (In Russian)].

[8] И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, ГОСТЕХИЗДАТ, М., 1959. [I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations*, GOSTEXIZDAT, Moscow, 1959 (In Russian)].

[9] Б. В. Боярский, "О задаче Дирихле для системы уравнений эллиптического типа в пространстве", *Бюлл. Польской АН. Серия матем. астр. и физ. наук*, **8**:1 (1960), 1050–1052. [B. V. Boyarskiy, "On the Dirichlet problem for the system of elliptic equations of a type in space", *Polands Bull. Mathem., Astr. and Phusicz Series*, **8**:1 (1960), 1050–1052 (In Russian)].

[10] Б. В. Боярский, "Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа", *Докл. АН СССР*, **124**:1 (1959), 1–4. [B. V. Boyarskiy, "Some boundary value problems for a system of equations of elliptic type", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **124**:1 (1959), 1–4 (In Russian)].

[11] А. И. Вольперт, "Об индексе задачи Дирихле", *Изв. вузов. Матем.*, 1960, № 5, 40–42. [A. I. Vol'pert, "On the index of the Dirichlet problem", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1960, № 5, 40–42 (In Russian)].

[12] В. И. Шевченко, "О совпадении индексов задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем", *Докл. АН СССР*, **221**:5 (1975), 1050–1052. [V. I. Shevchenko, "On the coincidence of the indices of the Dirichlet and Neumann problems for elliptic systems", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **221**:5 (1975), 1050–1052 (In Russian)].

[13] В. И. Шевченко, "Об одной краевой задаче для вектора, голоморфного в полупространстве", *Докл. АН СССР*, **154**:2 (1964), 276–278. [V. I. Shevchenko, "A boundary-value problem for a vector which is holomorphic in a half-space", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **154**:2 (1964), 276–278 (In Russian)].

[14] В. И. Шевченко, “Об эллиптических системах трех уравнений с четырьям независимыми переменными”, *Докл. АН СССР*, **210**:6 (1973), 1300–1302. [V. I. Shevchenko, “On elliptic systems of three equations in four independent variables”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **210**:6 (1973), 1300–1302 (In Russian)].

[15] В. И. Шевченко, “Об одном интегральном представлении вектора, голоморфного в шаре”, *Докл. АН СССР*, **153**:6 (1963), 1276–1279. [V. I. Shevchenko, “An integral representation of a vector which is holomorphic in a sphere”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **153**:6 (1963), 1276–1279 (In Russian)].

[16] Я. Б. Лопатинский, “Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям”, *Укр. матем. журн.*, **5**:123 (1953), 1127–1131. [Ya. B. Lopatinskiy, “On one method of reducing boundary value problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations”, *Ukr. Mathem. Journal*, **5**:123 (1953), 1127–1131 (In Russian)].

[17] А. Д. Джураев, *Метод сингулярных интегральных уравнений*, Наука, М., 1987. [A. D. Dzuraev, *Method of Singular Integral Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russian)].

[18] Г. Джангибеков, “О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах”, *Матем. заметки*, **46**:5 (1989), 91–93. [G. Dzhangibekov, “Some two-dimensional singular integral operators”, *Mat. Zametki*, **46**:5 (1989), 91–93 (In Russian)].

[19] Г. Джангибеков, “Нётеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов”, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, № 1, 19–28; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “The Noethericity and the index of some two-dimensional singular integral operators”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **35**:1 (1991), 21–31.

[20] Г. Джангибеков, “О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 1992, № 9, 25–37; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “On the Noethericity and index of some two-dimensional singular integral equations with discontinuous coefficients”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **36**:9 (1992), 22–33.

[21] Г. Джангибеков, “О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области”, *Докл. РАН*, **383**:1 (2002), 7–9; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “Some two-dimensional singular integral operators in a bounded domain”, *Dokl. Math.*, **65**:2 (2002), 149–151.

[22] Г. Джангибеков, Д. М. Одинабеков, “К теории нетера двумерных сингулярных операторов и ее приложения к краевым задачам для эллиптических систем уравнений четвертого порядка”, *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, **26**:1 (2020), 7–13. [G. Dzhangibekov, J. M. Odinabekov, “On the Noether theory of two-dimensional singular operators and applications to boundary value problems for system of fourth-order elliptic equations”, *Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, **26**:1 (2020), 7–13 (In Russian)].

[23] Г. Джангибеков, Д. М. Одинабеков, Г. Х. Худжаназарова, “Об условиях нётеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2019, № 2, 9–14; англ. пер.:G. Dzhangibekov, J. M. Odinabekov, G. Kh. Khudzhanazarova, “The Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:2 (2019), 49–54.

[24] Г. Джангибеков, Г. Худжаназарова, “О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области”, *Докл. РАН*, **396**:4 (2004), 449–454; англ. пер.:G. Dzhangibekov, G. Khujanazarova, “On the Noetherian property and index for some two-dimensional singular integral operators over bounded domains”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 394–399.

[25] Г. Джангибеков, Г. Худжаназарова, “О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости”, *Докл. РАН*, **398**:2 (2004), 151–155; англ. пер.:G. Dzhangibekov, G. Khujanazarova, “On the Dirichlet problem for a fourth-order elliptic system of two equations in the plane”, *Dokl. Math.*, **70**:2 (2004), 696-700.

[26] П. Т. Дыбов, “О разрешимости первой краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа шестого порядка”, *Докл. АН СССР*, **202**:6 (1972), 1251–1253. [P. T. Dibov, “The solvability of the first boundary value problem for a sixth order differential equation of elliptic type”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **202**:6 (1972), 1251–1253 (In Russian)].

Информация об авторе

Одинабеков Джасур Музофирович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и естественных наук. Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в городе Душанбе, г. Душанбе, Республика Таджикистан. E-mail: jasur-79@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

Поступила в редакцию 30.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 26.05.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

Information about the author

Jasur M. Odinabekov, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Mathematics and Natural Sciences Department. Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan. E-mail: jasur-79@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

Received 30.01.2023
Reviewed 26.05.2023
Accepted for press 09.06.2023